A4

Kは定数。

d [m] : w

ρ [kg/m³] : x

μ [Pa·s] = [kg/(m·s)] : y

u [m/s] : z

ΔP [Pa] = [kg/(m·s²)]

L [m]

左辺と右辺の各次元を一致させる。

長さ : $-2 = w - 3x - y + z$

質量 : $1 = x + y$

時間 : $-2 = -y - z$

これを $y = \alpha$ として解くと $w = -1-\alpha$, $x = 1-\alpha$, $z = 2-\alpha$

よって $\frac{\Delta P}{L} = k \cdot d^{(-1-\alpha)} \cdot \rho^{(1-\alpha)} \cdot \mu^{\alpha} \cdot u^{(2-\alpha)} = k\left(\frac{\rho u d}{\mu}\right)^{-\alpha} \times u^2 \cdot \rho \cdot d^{-1}$

よって $\frac{\Delta P d}{u^2 \rho L} = k\left(\frac{\rho u d}{\mu}\right)^{-\alpha}$

Fanningの式は $\Delta P = 4f \cdot \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \cdot \frac{L}{d}$

$u = \frac{4Q}{\pi d^2}$, $Re = \frac{\rho u d}{\mu} = A_0 \cdot \frac{1}{d}$

よって

$\frac{f \bar{u}^2}{2} \cdot \frac{1}{d} = A_1 \cdot \frac{1}{d^5}$

層流の場合, $f = \frac{16}{Re} = A_2 \cdot d$

よって $\frac{\Delta P}{L} = 4A_2 \cdot d \times A_1 \frac{1}{d^5} = A_3 \frac{1}{d^4}$

故に d を2倍にすると ΔP は $\frac{1}{16}$ 倍

ただし、$A_0 \sim A_5$ は定数

乱流の場合 $f = 0.0791\, Re^{-0.25} = A_4 \left(\frac{1}{d}\right)^{-0.25} = A_4 d^{0.25}$

よって $\frac{\Delta P}{L} = 4A_4 d^{0.25} \times A_1 \frac{1}{d^5} = A_5 \cdot d^{-4.75}$

故に d を2倍にすると ΔP は 0.037 倍